Anhang zum Bericht Nr.5b

Prof. Dr. Karl Baur

Dezember 2007

Formalismus zur Bestimmung von Abweichungswerten

Wie auf Seite 13 des Berichtes Nr. 5b angekündigt, soll nun der Formalismus näher erläutert werden, der der dortigen Abweichungsbetrachtung zu Grunde liegt.
Die bei jedem Tests aufgenommenen Kraftwerte (2500 an der Zahl über den Zeitbereich von 10 Sekunden) werden als Messwerte y_i bezeichnet. Sie schwanken um eine Sollkurve. Diese wird von der Steuerkurve des Rechners vorgegeben und ist quadratisch. Sie beginnt bei der 3-Sekundenmarke, hängt sonst noch aber von einigen Geräteparametern ab. Zur Berechnung der Sollkurve wird diese daher zunächst mit freien Parametern angesetzt:

$$y = a + b(x - c)^2$$

dabei ist c=3, a und b sind diese freien Parameter und x ist die Zeitachse; a und b sind nun zu bestimmen. Dazu wird die sog. Q-Funktion gebildet, die die Summe der quadratischen Abweichungen der Messwerte von der Sollkurve ist, um dann diese Q-Funktion in Abhängigkeit von a und b zum Minimum zu machen:

$$Q = \sum_{n_1}^{n_2} (y_i - a - b(x_i - c)^2)^2 ==> Min.$$

Für die beiden Differentialquotienten ergibt sich daraus mit $n_2 - n_1 = n$

$$\partial Q / \partial a = -2\sum y_i + 2na + 2b\sum (x_i - c)^2 = 0$$
$$\partial Q / \partial b = -2\sum y_i (x_i - c)^2 + 2a\sum (x_i - c)^2 + 2b\sum (x_i - c)^4 = 0$$

und daraus die zwei linearen Gleichungen in a und b

$$an \qquad + b\sum (x_i - c)^2 = \sum y_i$$
$$a\sum (x_i - c)^2 + b\sum (x_i - c)^4 = \sum y_i (x_i - c)^2$$

mit der Lösung

$$a = \frac{\sum y_i \sum (x_i - c)^4 - \sum (y_i (x_i - c)^2) \sum (x_i - c)^2}{n\sum (x_i - c)^4 - (\sum (x_i - c)^2)^2}$$
$$b = \frac{n\sum y_i (x_i - c)^2 - \sum y_i \sum (x_i - c)^2}{n\sum (x_i - c)^4 - (\sum (x_i - c)^2}$$

Die Summen sind alle auszuführen über den Abszissenbereich von 3 bis 6 Sekunden, da man nur den Anfangsteil der Parabel überblicken will. Bei 2500 Messpunkten über 10 Sekunden wird $n_1 = 750$, $n_2 = 1500$ und damit die Summenlänge. Bei den vorgegebenen Tests liegen die a und b zwischen 0,3 und 0,6 und müssen für jeden Test einzeln bestimmt werden. Dies ist deswegen nötig, weil bei jedem Test die Voraussetzungen und Vorbedingungen etwas anders ausfallen können.
Mit obiger Lösung ist nun die Sollkurve eindeutig festgelegt. Sie schmiegt sich im Anfangsbereich der Parabel am besten den Messwerten (Testwerten) an.
Über die Schwankungen der Messwerte können nun Aussagen erarbeitet werten, indem die Abweichungen dieser Messwerte von der Sollkurve berechen bar sind. Diese Abweichungen stehen aber bereits in der weiter oben angegebenen Q-Funktion, die durch ihren quadratischen Charakter die Streuung der Messwerte ausdrückt, sodass die mittlere quadratische Abweichung durch

$$\sigma = \frac{1}{n-1}\sqrt{Q}$$

gegeben ist. Sie ist für die Kraftkurve von jedem Test berechnet und in die Diagramme des Berichtes 5b Abschnitt 6 eingetragen.
Genauso kann in den Summengliedern der Q-Funktion

$$(y_i - a - b(x_i - c)^2)^2$$

für jede Kraftkurve nach dem Maximum gesucht werden. Dies ist in EXCEL möglich durch Verwendung des Befehls „MAX“. Die Wurzel jedes dieser Werte ergibt dann die mögliche maximale absolute Abweichung, die ebenfalls in den besagten Diagrammen zu finden ist.